Bemerkung zum Beweis von W. H. Wise über die Nichtexistenz der Zenneckschen Oberflächenwelle im Antennenfeld

Von H. Ott *

(Z. Naturforschg. **8a**, 100—103 [1953]; eingegangen am 16. September 1952)

Erwin Fues zum 60. Geburtstag

Der viel zitierte Beweis von Wise schließt nicht aus, daß das Fernfeld eines Dipols längs der Grenzfläche eines guten Leiters eine (u. U. sogar dominierende) *Zenneck'sche Oberflächenwelle* enthält.

§ 1. Allgemeines

Man stößt in der Literatur immer wieder auf die Ansicht[1], ein von Wise[2] gegebener Beweis habe *jeglicher Zenneck-Welle* im Feld einer Vertikalantenne (auf ebener Erde) ein für allemal den Garaus gemacht. Eine kritische Untersuchung (§ 3) möge zeigen, daß der genannte Beweis eine so weitgehende Folgerung nicht rechtfertigt: Er kann nämlich tatsächlich nicht jene Zenneck-Welle ausschließen, die auf Grund anderer Überlegungen (§ 2) vorhanden sein muß, sobald der Leiterstrom im Boden den dortigen Verschiebungsstrom wesentlich überwiegt (also $n^2 = \varepsilon + i\,\sigma/\omega\,\varepsilon_0$ fast *rein imaginär*), wie dies über Seewasser für km-Wellen, noch besser aber über Metallflächen bis herab zum cm-Gebiet und darunter verwirklicht ist (z. B.: $n^2 = 1 + 2 \cdot 10^8\, i$ für die 5-cm-Welle über Kupfer).

Der Streit um die Zenneck-Welle im Strahlungsfeld eines Dipols geht bekanntlich zurück auf die ursprüngliche Sommerfeldsche Lösung[3] von 1909. Infolge einer *besonderen Führung* des Integrationsweges zerfiel dieselbe in drei Terme $\Pi = Q_1 + Q_2 + P$, wobei Q_1 und Q_2, die Integrale über die Verzweigungsschnitte des Integranden, von Sommerfeld als „Raumwellen" angesprochen wurden (Q_2 kann übrigens stets vernachlässigt werden, wenn der Brechungsindex n genügend groß ist), während der Term P, das Residuum eines eingefangenen Pols, eine *Zenneck-Welle* darstellte. Gegen die Auswertung des Integrals Q_1, vor allem aber gegen die durch den Sommerfeldschen Weg vorgenommene *Abtrennung* des Residuums P wurden in der Folge gewichtige mathematische Bedenken vorgebracht, welche einen endlosen Streit um die Realität dieser Welle entzündeten[1]. Wir wissen heute, daß man die beiden Integrale Q_1 und P wegen der Nachbarschaft von Verzweigungspunkt und Pol nicht getrennt, sondern nur *zusammengefaßt* auswerten darf und kennen das Resultat für das Fernfeld $kr \gg 1$ sehr gut. Übereinstimmend ergaben hierfür spätere Arbeiten von Sommerfeld[4] und zahlreichen anderen Autoren[5] auf zum Teil verschiedenen Wegen (für größere n und nicht zu große Abstände z von der Grenzfläche):

$$\Pi \approx Q_1 + P \approx \frac{2\, e^{ikR}}{R} \left(1 + i \sqrt{\pi \varrho_0}\; e^{-\varrho} - 2 \sqrt{\varrho_0}\; e^{-\varrho} \int_0^{\sqrt{\varrho}} e^{\alpha^2} \mathrm{d}\alpha\right), \quad (1)$$

worin ϱ die „numerische Entfernung" bedeutet, die sich mit dem Winkel $\tau = \operatorname{arc\,tg} 1/n$ und dem Erhebungswinkel $\xi = \operatorname{arc\,tg} z/r$ auf die Form

$$\varrho = 2\, i\, k\, R \sin^2\left(\frac{\xi + \tau}{2}\right) \quad (2)$$

bringen läßt[6]; ϱ_0 ist die Entfernung längs des Bodens $\xi = 0$, die sich für große $|\,n\,|$ vereinfacht zu

$$\varrho_0 = 2\, i\, k\, r \sin^2 \frac{\tau}{2} = \frac{i\, k\, r}{2\, n^2}. \quad (3)$$

Die in der Klammer von (1) vorkommenden Terme bezeichnen wir zur Abkürzung mit

$$Z = i \sqrt{\pi \varrho_0}\; e^{-\varrho} \quad \text{und} \quad A = 2 \sqrt{\varrho_0}\; e^{-\varrho} \int_0^{\sqrt{\varrho}} e^{\alpha^2} \mathrm{d}\alpha. \quad (4)$$

* Würzburg, Franz-Schubert-Str. 3.

[1] Th. Kahan u. G. Eckart, Arch. elektr. Übertrag. **5**, 25, 347 [1951].

[2] W. H. Wise, Bell System techn. J. **16**, 35 [1937].

[3] A. Sommerfeld, Ann. Physik **28**, 665 [1909].

[4] A. Sommerfeld, Vorlesungen über Theoretische Physik, Bd. VI, S. 259, Wiesbaden 1947.

[5] S. etwa: Frank-Mises, Differentialgleichungen der Physik, S. 933/934, F. Vieweg, Braunschweig 1935.

[6] H. Ott, Z. angew. Physik **3**, 123 [1951].

Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung") beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

§ 2. Die Zenneck-Welle in der Lösung (1)

Das Residuum P kommt zwar in (1) explizit nicht mehr vor, allein der zweite Term $2e^{ikR}Z/R$ stellt vermöge des Exponenten

$$ikR - \varrho = ikR\cos(\tau+\xi) = ik(r\cos\tau - z\sin\tau)$$

wiederum eine Zenneck-Welle dar (denn die Richtung $\tau+\pi/2$ der Wellennormalen ist der Brewstersche Winkel), die im lim $|n| = \infty$ nach Amplitude und Phase mit dem *halben Sommerfeldschen Residuum* ($P/2$) identisch wird[7]. Dieser Befund, der in der Literatur einige Verwirrung erregt hat, ist aber keineswegs eine Rechtfertigung des *ursprünglichen*, nun auf $P/2$ korrigierten Sommerfeldschen Standpunkts. Es ist nicht so, daß man im Strahlungsfeld unter allen Umständen und in allen Raumpunkten nun mit einer Zenneck-Welle von der Stärke $P/2$ statt P zu rechnen hätte. Die Dinge liegen erheblich komplizierter: es könnte ja sein, daß in der Klammer von (1) der zweite Term Z durch den folgenden $-A$ mehr oder weniger wieder kompensiert wird, so daß die Zenneck-Welle im Gesamtfeld doch nicht zur Geltung kommt. Wie wir sehen werden, ist dies sogar die Regel, jedoch gibt es zwei leicht erkennbare Grenzfälle, in denen eine derartige Kompensation der Zenneck-Welle nicht möglich ist, nämlich:

1. im Bereich kleiner $|\varrho|$, wo A *klein* gegen Z ist [vgl. (4)], ein Fall, der praktisch freilich keine Bedeutung hat, da Z nun auch klein gegen 1 ist und die Zenneck-Welle in der Abrahamschen Lösung $2e^{ikR}/R$ völlig untergeht.

2. im einleitend erwähnten Fall des fast rein imaginären n^2, wo nach (3) der Imaginärteil von ϱ_0 vernachlässigt werden darf (Näheres s. u.). Dann wird nämlich $1-A$ am Boden ($\varrho\sim\varrho_0$) *reell*, Z aber rein *imaginär* und kann somit von A nicht weggehoben werden. Zudem wird $1-A$ mit wachsendem $|\varrho_0|$ alsbald so klein, daß die Zenneck-Welle sogar *dominiert*, solange ihre exponentielle Dämpfung noch nicht wirksam ist. Es ist dies der Bereich $|\varrho_0| = 0{,}2$ bis $|\varrho_0| = 2{,}2$, auf den bereits Sommerfeld[3] aufmerksam gemacht hat, dessen Abb. 8 wir für den in Rede stehenden Fall auch heute noch akzeptieren können. Man vergleiche dazu auch die vom Verf.[6] gegebene graphische Darstellung des Gesamtfelds, aus deren Abb. 7 sich die Rolle der Zenneck-Welle [= Imaginärteil von $H(\varrho_0)$] im Verhältnis zum übrigen Feld [= Realteil von $H(\varrho_0)$] nach Betrag und Phase unmittelbar ablesen läßt.

Diese Zenneck-Welle ragt aber nicht sehr weit in den Luftraum hinein; denn mit wachsendem Abstand z von der Grenzfläche erhält ϱ schließlich einen beachtlichen Imaginärteil und es kommt dann, wie wir unten sehen werden, unter dem Einfluß des nun komplex werdenden Terms A zu einer durchgreifenden Umbildung des Gesamtfelds. Immerhin kann der zulässige Abstand z von der Grenzfläche viele Wellenlängen umfassen.

Die obige Voraussetzung einer *rein reellen* Bodenentfernung ϱ_0 ist in der Praxis streng genommen freilich nie ganz erfüllt; aber über guten Leitern, wo der Brechungsindex n sehr groß und sein Verlustwinkel $\delta = \text{arc}\, n$ nahe bei $\pi/4$ liegt, fällt der Imaginärteil von ϱ_0 kaum ins Gewicht, außer bei extrem großen $|\varrho_0|$. So hat man z. B. für die 5 cm-Welle über Kupfer: $\pi/4 - \delta = 1/4\cdot10^{-8}$ und Imag. $\varrho_0 \approx |\varrho_0|\cdot 10^{-8}$.

Wenn jedoch δ wesentlich von $\pi/4$ abweicht und der Imaginärteil von ϱ_0 merklich wird, können sich Z und A nicht mehr so ungestört überlagern, wie vorhin, da beide Terme nun komplex werden. Ja sie müssen sich sogar für große $|\varrho_0|$ jetzt gegenseitig zerstören, wie man dem Umstand entnimmt, daß der Betrag von (1) stets unterhalb der Abrahamschen Lösung, $|1+Z-A|$ also *kleiner* als 1 bleiben muß. Diese Bedingung würde mit abnehmendem δ verletzt werden, wenn Z nun nicht irgendwie durch $1-A$ kompensiert würde, denn das Maximum $|Z|_{\max} = (\pi/2e\sin 2\delta)^{1/2}$ übersteigt für $\delta < 17{,}5^0$ den Wert 1. Für solche δ, also an dielektrischen Grenzflächen, kann sich die Zenneck-Welle nicht mehr ungestört und dominierend ausbilden.

§ 3. Der Beweis von Wise und sein Versagen

Wir wollen nun zeigen, daß der einleitend erwähnte Beweis von Wise, reduziert auf seinen tatsächlichen Inhalt, den vorigen Ergebnissen nicht widerspricht. Da die einschlägige Literatur etwas schwierig zu beschaffen ist, sei auf diesen Beweis ein wenig näher eingegangen. Derselbe fußt auf der Tatsache, daß die Sommerfeldsche Gesamtlösung Π (und zwar die ursprüngliche von 1909, die sich von (1) durch den Faktor $\frac{2n^2}{1+n^2}$ unterscheidet) sich in zwei Teile zerlegen läßt, die für $z=0$ bei Vertauschung k_1 mit k_2 ineinander übergehen (k_1 bedeute jetzt die vorige Wellenzahl k im Luftraum, $k_2 = nk_1$ die im Boden). Für diese beiden Teile haben Wise[2] und

[7] H. Ott, Arch. elektr. Übertrag. 5, 15, 343 [1951].

Rice[8] auf Grund des van der Polschen Integrals[5] konvergente Reihen nach aufsteigenden Potenzen von r und semikonvergente Reihen nach absteigenden Potenzen angegeben. Bedeuten $s = k_1 k_2/\sqrt{k_1^2+k_2^2}$, $q = k_1/k_2$ und P_ν, P_ν^n die Legendreschen Kugelfunktionen, so lauten die konvergenten Reihen (wir folgen den Darstellungen von Rice):

$$Q_1 + P/2 = \frac{1}{1-q^2}\sqrt{\frac{\pi q}{2}}\,\frac{e^{ik_1 r}}{r}\sum_0^\infty{}_\nu \,(-isqr)^\nu\, P_{-1/2}^{1/2-\nu}(k_1/s). \tag{5}$$

Der andere Term $Q_2 + P/2$ entsteht aus (5) durch Vertauschung von k_1 mit k_2.

Die semikonvergenten (asymptotischen) Reihen lauten:

$$Q_1 + P = \frac{1}{(q^2-1)\,r}\left[e^{ik_1 r}\sum_1^N{}_\nu \frac{\nu!\,P_\nu(k_2/s)}{(isqr)^\nu} + R_{1N}\right], \tag{6}$$

worin R_{1N} das auf das N-te Reihenglied folgende Restglied ist, für das Rice die Abschätzung gibt:

$$|R_{1N}| \lessgtr \left|\frac{(N+1)!\,e^{k_1 r}}{\sqrt{\sin\Theta_1}\,\left(r(k_1-s)\sin\Theta_1\right)^{N+1}}\right| \tag{7}$$

mit

$$\Theta_1 = \pi/2 - \mathrm{arc}\,(k_1 - s). \tag{8}$$

Durch Vertauschung von k_1 mit k_2 erhält man aus (6) die asymptotische Reihe für den anderen Teil Q_2; diese fällt wegen des im allgemeinen stark gedämpften Faktors $e^{ik_2 r}$ für größere r sehr klein aus und kann nach Rice durch den Rest „nullter Ordnung" R_{20} approximiert werden:

$$Q_2 = \frac{q^2}{1-q^2}\,\frac{1}{r}\,R_{20},$$

$$|R_{20}| \lessgtr \left|\frac{e^{ik_2 r}}{\sqrt{\sin\Theta_2}\; r\,(k_2-s)\sin\Theta_2}\right|. \tag{9}$$

[Die letzte Formel entsteht aus (7) für $N = 0$ durch Vertauschung der Wellenzahlen, wobei der Winkel $\Theta_2 = \pi/2 - \mathrm{arc}\,(k_2 - s)$ zwischen $\pi/4$ und $\pi/2$ zu liegen kommt.]

Die Reihen (5) und (6) und die aus ihnen durch Vertauschung der Wellenzahlen entstehenden sind exakt ohne jede Vernachlässigung.

Ferner lautet das Sommerfeldsche Residuum

$$P = \frac{\pi s q}{q^2-1}\,H_0^1(sr). \tag{10}$$

Es hat die bemerkenswerte Eigenschaft, daß es bei Vertauschung der Wellenzahlen *lediglich sein Vorzeichen ändert.*

Aus diesem Verhalten von P und den Reihen (5, 6) sowie den daraus durch Vertauschung der Wellenzahlen entstehenden, hat Wise geschlossen, der Term P müsse aus der Gesamtlösung Π überhaupt *völlig herausfallen*. Diese Folgerung ist u. E. zu weitgehend. Mit Sicherheit läßt sich nur behaupten, daß in der Gesamtlösung Π eine Zenneck-Welle nicht in Form eines *selbständigen, additiven* Terms, also nicht in der Rolle des ursprünglichen *Sommerfeldschen Residuums* P auftreten kann, und zwar folgt dies bereits aus den asymptotischen Reihen (6) und (9) allein; denn die rechte Seite von (6) geht bei Vertauschung von k_1 mit k_2 in den *wesentlich kleineren* Term (9) über und das könnte nicht sein, wenn in der linken Seite von (6) das für alle r und n gültige und (bis auf das Vorzeichen) *invariante* Residuum additiv enthalten wäre. (Daß P in Π unmöglich additiv enthalten sein kann, folgt übrigens auch aus anderen Überlegungen: Die logarithmische Singularität von $H_0^1(sr)$ an der Stelle $r = 0$ widerspricht dem dort vorausgesetzten Dipol und die für *reelle* n *zu langsame* Abnahme von H_0^1 im Unendlichen der Ausstrahlungsbedingung. P muß also im Punkt $r = 0$ und allenfalls im Unendlichen kompensiert sein.)

Nun ist es aber mit der Lösung (1) und der darin enthaltenen Zenneck-Welle ganz anders bestellt als mit dem Sommerfeldschen Residuum P. Zunächst einmal ist (1) nur gültig für das Fernfeld, weshalb das Verhalten für $r = 0$ hier überhaupt nicht zur Diskussion steht. Und der scheinbare Widerspruch, daß bei Vertauschung der Wellenzahlen der Term $2e^{ikR}Z/R$ (bis auf das Vorzeichen) invariant bleiben, während doch gleichzeitig die ganze rechte Seite von (1) klein von der Ordnung Q_2 werden soll, löst sich in einfacher Weise: Die Form (1) ist nämlich keine exakte Darstellung von $Q_1 + P$, sondern eine unter der Voraussetzung $|k_2| \gg k_1$ abgeleitete *Näherung*, bei welcher die Zenneck-Welle $2e^{ikR}Z/R$ dadurch anfällt, daß sich ein gewisser Pol mit wachsendem $|n|$, bzw. $|k_2|$ unbegrenzt dem Sattelpunkt des Integranden nähert[7]. Mit Vertauschung der Wellenzahlen ändern sich aber die topologischen Verhältnisse des Ausgangsintegrals derart, daß sich eine *ganz andere Näherung*, nämlich Q_2 anbietet. Da also die Vertauschungsoperation der Wellenzahlen und die daraus resultierenden Schlüsse auf die rechte Seite von (1) gar nicht anwendbar sind, bleibt zum Entscheid für oder gegen die Realität der Zenneck-Welle $2e^{ikR}Z/R$ nur noch die Reihe (6) und zwar deren numerischen Werte. Und nun ist

[8] S. O. Rice, Bell System techn. J. **16**, 101 [1937].

es bezeichnend, daß — was bisher offenbar übersehen wurde — die Entwicklung (6) gerade im Falle fast rein imaginärer n^2 *völlig illusorisch* wird, da die Abschätzung (7) des (bei Wise übrigens fehlenden) Restglieds R_{1N} infolge Verschwindens des Nenners versagt. Denn die Größe $r \mid k_1 - s \mid \sin \Theta_1$ ist nichts anderes, als der Imaginärteil der numerischen Entfernung ϱ_0, wie man sofort erkennt, da man statt (3) ohne jede Vernachlässigung schreiben kann

$$\varrho_0 = 2 i k_1 r \sin^2 \frac{\tau}{2} = i r (k_1 - s):$$

[s. dazu die Definition von τ und s; oder auch Sommerfeld[4], Gl. (21); s ist das Sommerfeldsche p.]

Da nun weiter nach (8)

$$i r (k_1 - s) = r \mid k_1 - s \mid e^{i(\pi - \Theta_1)}$$

ist, folgt unmittelbar unsere Behauptung

$$\text{Imag.}\, \varrho_0 = r \mid k_1 - s \mid \sin \Theta_1 .$$

Beispielsweise ergibt sich für die 5 cm-Welle über Kupfer:

$$\text{Imag.}\, \varrho_0 = k r / 4 \cdot 10^{-16} = |\varrho_0| \cdot 10^{-8} \text{ und } \sin \Theta_1 \approx 10^{-8},$$

also ein völliges Versagen der Abschätzung (7), so daß (6) keineswegs der Existenz einer Zenneck-Welle an Metallflächen widerspricht.

Anders werden diese Dinge an dielektrischen Grenzflächen, wo der Imaginärteil von ϱ_0 nicht mehr klein ist und die Reihe (6) verwendet werden kann. Wise gibt dafür ein numerisches Beispiel: Für $kr = 100$ und den (fast reellen!) Wert $n^2 = 80 + 0{,}7512\, i$ wird die rechte Seite von (6) numerisch gleich $(0{,}086 + 0{,}187\, i)/r$, der Term P für sich allein jedoch von der Größe $(4{,}47 + 1{,}92\, i)/r$. Letzterer kann also nicht ungestört in $Q_1 + P$ enthalten sein, sondern muß irgendwie durch Q_1 kompensiert werden. Dies bringt uns aber nichts Neues, denn die Notwendigkeit einer solchen Kompensation im Fall kleinerer Verlustwinkel δ haben wir bereits im § 2 erkannt und betont.

Die Ergebnisse von Wise und Rice stehen also bei kritischer Betrachtung nicht im Widerspruch zum Befund des § 2, nach welchem bei fast imaginärem n^2, also besonders an Metallflächen, im Gesamtfeld (1) sehr wohl eine Zenneck-Welle enthalten sein und sogar dominieren kann. Diese Welle reicht aber nicht sehr weit in den Luftraum hinein; mit wachsendem Abstand z von der Grenzfläche erfährt das Feld eine durchgreifende Umbildung, ebenso mit abnehmendem Verlustwinkel δ bereits an der Grenzfläche selbst.

Wir schließen mit dem Hinweis, daß auch die häufig zitierten Messungen von Burrows[9], der vergeblich nach der Zenneck-Welle (allerdings nach P und nicht nach $P/2$) gesucht hat, nicht als Gegenbeweis gegen eine solche Welle dienen können; die diesen Messungen zugrunde liegenden Verlustwinkel δ sind eben zu klein (kurze Wellen über Süßwasser), um die Zenneck-Welle in Erscheinung treten zu lassen.

Herrn C. J. Bouwkamp, Eindhoven, bin ich zu besonderem Dank verpflichtet, daß er mir die Arbeiten von Wise und Rice zugänglich gemacht hat.

[9] C. R. Burrows, Proc. Inst. Radio Engr. **25**, 219 [1937].

Verantwortlich für den Inhalt: A. Klemm
Satz und Druck H. Laupp jr Tübingen